BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКО-УПРУГОЙ ТРУБКЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ
Бакинский Государственный Университет

Классические представления гидродинамики неприемлемы при исследовании течения сплошных сред, содержащих длинные «высокополимерные» молекулы. Этот факт имеет первостепенное значение для многих технологических процессов, где приходится встречаться с движением коллоидных растворов, суспензий, эмульсий и т.д. При изучении течения таких жидкостей используются реологические модели, представляющие собой различные комбинации упругих и вязких элементов. Их поведение, по крайней мере, качественно соответствует поведению вышеперечисленных сред.

1. В настоящей работе, в развитие [1], дается строгое математическое решение одномерной задачи о пульсирующем течении максвелловской жидкости, заключенной в тонкостенную полубесконечную вязко-упругую трубку переменного кругового сечения. Подобные задачи для случая идеальной или вязкой жидкости и упругой трубки рассмотрены в [2,3,4].

Введем в рассмотрение вязко-упругую трубку переменного кругового сечения $R = R(x)$ и толщиной h, где $R(x)$ - монотонно убывающая функция $\forall x \in [0, \infty)$. Тогда система динамических уравнений гидроупругости состоит из уравнения неразрывности [3]

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

уравнения импульсов

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(-p + \sigma) \tag{1.2}$$

уравнения состояния жидкости [1]

$$\sigma = E_{ж}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\exp\{-\lambda(t-\tau)\}d\tau \tag{1.3}$$

и уравнения состояния трубки, которое для длинных волн, пренебрегая динамическими эффектами, имеет вид:

$$p=\frac{h}{R^2(x)}E^{\vee}w\,, \qquad (1.4)$$

где вязко-упругие свойства материала описываются теорией наследственной упругости Ю.Н.Работнова [5]

$$E^{\vee}w=E\left\{w-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)w(\tau)d\tau\right\} \qquad (1.5)$$

В формулах (1.1)-(1.5) $w(x,t)$ - радиальное смещение трубки, $u(x,t)$ - скорость течения жидкости, $\sigma(x,t)$ - «вязко-упругое» напряжение, $p(x,t)$ - гидродинамическое давление, ρ - плотность жидкости, E и $E_{ж}$ - соответственно модули упругости материала трубки и жидкости, $\Gamma(t-\tau)$ - разностное ядро релаксации, $\lambda=E_{ж}/\eta$, где η - коэффициент вязкости жидкости, $S(x)=\pi R^2(x)$ -площадь поперечного сечения трубки, $L(x)=2\pi R(x)$ -длина её окружности.

Учитывая теперь (1.3) в (1.2), для уравнения импульсов получим:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+E_{ж}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\exp\{-\lambda(t-\tau)\}d\tau\,. \qquad (1.6)$$

Далее, не умоляя общности, функцию $R(x)$ запишем как $R(x)=R_{\infty}g(x)$ и будем полагать, что на бесконечности трубка имеет постоянное поперечное сечение R_{∞} т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$. Одновременно примем, что

$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=0\,,\ \lim_{x\to\infty}g''(x)=0\,. \qquad (1.7)$$

Примером такой функции является функция $g(x)=1+e^{-\beta x}$ [2], которая характеризует, например, сужение аорты по её длине.
Уравнения (1.1), (1.4) и (1.6) полностью описывают динамическое поведение системы. Сведем их к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, полагая, что все искомые функции пропорциональны временному множителю $\exp(i\omega t)$

$$u=c_0u_1(x)\exp(i\omega t),\quad w=R_{\infty}w_1(x)\exp(i\omega t),\ \ p=Ep_1(x)\exp(i\omega t). \quad (1.8)$$

Здесь $c_0=(E/\rho)^{\frac{1}{2}}$ – опорная скорость, ω – угловая скорость, а u_1, w_1 и p_1 – безразмерные комплексные функции координаты положения.
В начале преобразуем интегральное слагаемое в (1.6)

$$E_{ж}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\exp\{-\lambda(t-\tau)\}d\tau=\frac{E_{ж}}{i\omega+\lambda}u_1''\exp(i\omega t)\,.$$

Аналогично используя замену $t-\tau=\theta$, из (1.5) имеем:

$$-E\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)w(x,\tau)d\tau=-E\alpha w_1\exp(i\omega t),$$

где для краткости записи введено обозначение

$$\alpha = \int_0^\infty \Gamma(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta .$$

Подставляя (1.8) в (1.1), (1.4), (1.6), используя два последних равенства и приняв $E_ж / E = \mu$, $h/R_\infty = \xi$, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\frac{\omega}{c_0}u_1 = -p_1' + \mu\frac{c_0}{i\omega + \lambda}u_1'' \tag{1.9}$$

$$g(x)c_0 u_1' + 2g'(x)c_0 u_1 + 2i\omega w_1 = 0 \tag{1.10}$$

$$p_1 = \xi(1-\alpha)\frac{w_1}{g^2(x)} \tag{1.11}$$

Определив из (1.10) величину w_1 запишем:

$$w_1 = \frac{i}{\omega}c_0\left\{\frac{1}{2}g(x)u_1' + g'(x)u_1\right\}.$$

Подставив это выражения в (1.12), имеем:

$$p_1 = \frac{i}{2\omega}\xi(1-\alpha)c_0\frac{u_1'}{g(x)} + \frac{i}{\omega}\xi(1-\alpha)c_0\frac{g'(x)}{g^2(x)}u_1 \tag{1.12}$$

Дифференцируя (1.12) по x, получим зависимость

$$p_1' = \alpha_1(x)u_1'' + \{\alpha_3(x) - \alpha_2(x)\}u_1' + \alpha_4(x)u_1 , \tag{1.13}$$

в которой

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(x) = \frac{1}{\omega}\xi(1-\alpha)\frac{c_0}{2g(x)},\\
&\alpha_2(x) = \frac{1}{\omega}\xi(1-\alpha)\frac{c_0}{2}\frac{g'(x)}{g^2(x)},\\
&\alpha_3(x) = 2\alpha_2(x),\\
&\alpha_4(x) = \frac{1}{\omega}\xi(1-\alpha)c_0\frac{g(x)g''(x) - 2g'^2(x)}{g^3(x)}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Учитывая теперь (1.13) в (1.9) и введя для краткости записи следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = \alpha_4(x) + i\frac{\omega}{c_0},\\
&f_1(x) = \frac{i}{2\omega}\xi(1-\alpha)c_0\frac{g'(x)}{g^2(x)},\\
&f_2(x) = \alpha_1(x) - \mu\frac{c_0}{i\omega + \lambda}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

для определения u_1 имеем:

$$f_2(x)u_1'' + f_1(x)u_1' + f_0(x)u_1 = 0 \tag{1.16}$$

Замечая из (1.14) и (1.15), что отношение f_1/f_2 дифференцируемая функция и полагая в (1.16) замену Лиувилля

$$y(x) = u_1(x)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\right\} = u_1(x)v(x) \tag{1.17}$$

из (1.16) получаем приведенную форму уравнения

$$y'' + I(x)y = 0\,, \tag{1.18}$$

где инвариант $I(x)$ определяется посредством формулы

$$I(x) = \frac{f_0(x)}{f_2(x)} - \frac{1}{4}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)'. \tag{1.19}$$

Что касается скорости распространения волны $c = \omega/\mathrm{Re}\,I(x)$, и затухания $JmI(x)$, то они зависят от координаты x и являются локальными волновыми характеристиками.

Как следует из выражений (1.14), (1.15) и (1.17)

$$\lim_{x\to\infty} f_0(x) = i\frac{\omega}{c_0},$$

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \frac{ic_0}{2\omega}\xi(1-\alpha) - \mu\frac{c_0}{i\omega+\lambda}.$$

Отсюда для (1.19) непосредственно вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \delta^2 = \frac{i\omega}{c_0^2\left\{\dfrac{i}{2\omega}\xi(1-\alpha) - \mu\dfrac{1}{i\omega+\lambda}\right\}} \tag{1.20}$$

Используя замену

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2} \tag{1.21}$$

уравнение (1.18) приведем к виду

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y \tag{1.22}$$

Исследование корней дисперсионного уравнения (1.20) никаких затруднений не вызывает и поэтому, в последующих рассуждениях, будем использовать корень, у которого $\mathrm{Im}\,\delta < 0$, а на потенциал $q(x)$ наложим условие интегрируемости

$$\int_0^\infty |q(x)|dx < +\infty\,. \tag{1.23}$$

Покажем, что важный случай ступенчатого изменения радиуса трубки удовлетворяет условию (1.23). Для наглядности рассмотрим трубку, состоящую из двух частей. Оставляя в основном прежние обозначения, эти части будем характеризовать длинами l_1, l_2 и радиусами $R_1\{g(x) > 1\}$,

$R_\infty\{g(x)=1\}$, причем $l_2=\infty$. Тогда согласно формулам (1.19) и (1.21) потенциал запишем как

$$q(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\delta_1^2}{\delta^2} & 0\le x\le l_1\\ 0 & x>l_1\end{cases} \tag{1.24}$$

Чтобы оценить интеграл

$$\int_0^\infty |q(x)|dx$$

разобьем область интегрирования на две части

$$\int_0^\infty |q(x)dx|=\int_0^{l_1}|q(x)dx|+\int_{l_1}^\infty |q(x)dx| \ .$$

Учитывая равенство (1.24) и проведя соответствующее интегрирование приходим к сформулированному утверждению. Схему доказательства легко обобщить, если трубка составлена из конечного числа частей.

Для построения решений, уравнение (1.22) необходимо дополнить следующими граничными условиями

$$y(0)=y_0,\quad y\to 0 \text{ при } x\to\infty \tag{1.25}$$

Ход вычисления величины y_0 будет изложен ниже, а второе условие (1.25) обеспечивает ограниченность и единственность искомого решения. В результате, решение задачи сведено к сингулярной краевой задаче Штурма-Лиувилля (1.22) и (1.25).

2. Рассматривая в уравнении (1.22) член $\delta^2 q(x)$ как внешний источник и применяя метод вариации произвольных постоянных, задача сводится к решению эквивалентного интегрального уравнения

$$y(x,-\delta)=Ce^{-i\delta x}+\delta\int_x^\infty \sin\delta(z-x)q(z)y(z,-\delta)dz \ . \tag{2.1}$$

Здесь постоянная C определяется как

$$C=\frac{y_0}{\varphi(0,-\delta)},$$

а

$$y=y_0\frac{\varphi(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)},$$

где новая функция $\varphi(x,-\delta)$ является решением следующего интегрального уравнения [3]

$$\varphi(x,-\delta)=e^{-i\delta x}+\delta\int_x^\infty \sin\delta(z-x)q(z)\varphi(z,-\delta)dz \ . \tag{2.2}$$

Оно является уравнением типа Вольтерра и решается методом последовательных приближений

$$\varphi(x,-\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n\varphi_n(x,-\delta), \tag{2.3}$$

где имеем совокупность рекуррентных соотношений

$$\varphi_0(x,-\delta)=e^{-i\delta x},\ldots\varphi_n(x,-\delta)=\int_x^{\infty}\sin\delta(z-x)q(z)\varphi_{n-1}(z,-\delta)dz\ (n=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

В силу неравенства (1.23), по признаку Вейерштрасса, из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (2.2) определяется формулой (2.3). Непосредственной проверкой легко установить, что это решение является также решением исходного уравнения (1.22).

Для дальнейших целей необходимо заметить, что из структуры ряда (2.3) вытекает, что ряд, полученный его почленным дифференцированием по x, также сходится равномерно.

3. Для последующего описания давления, скорости и перемещения можно принять различные граничные условия. Типичным случаем является ситуация, при которой на торце трубки $x=0$ задано или пульсирующее давление

$$p(0,t)=p_0\exp(i\omega t), \tag{3.1}$$

либо скорость (расход) жидкости

$$u(0,t)=u_0\exp(i\omega t) \tag{3.2}$$

Далее, не представляет принципиального труда вычислить величину y_0 и после ряда преобразований определить функции p,u и w, которые имеют вид:

$$p=p_0\frac{F(x)}{F(0)}\exp(i\omega t)$$

$$u=-i\frac{p_0}{E}\frac{\omega}{\xi(1-\alpha)}\frac{1}{F(0)v(x)}\frac{\varphi(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)}\exp(i\omega t)$$

$$w=\frac{R_\infty}{\xi(1-\alpha)}\frac{p_0}{E}g^2(x)\frac{F(x)}{F(0)}\exp(i\omega t)$$

при граничном условии (3.1), или

$$p = u_0 \frac{i}{\omega} \xi (1-\alpha) E F(x) v(0) \exp(i\omega t)$$

$$u = u_0 \frac{v(0)}{v(x)} \frac{\varphi(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)} \exp(i\omega t)$$

$$w = u_0 \frac{i}{\omega} R_\infty F(x) g^2(x) v(0) \exp(i\omega t)$$

при (3.2). В полученных решениях функция $F(x)$ определяется через φ посредством формулы

$$F(x) = \frac{1}{2g(x)} \frac{v(x)\dfrac{\varphi'(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)} - v'(x)\dfrac{\varphi(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)}}{v^2(x)} + \frac{g'(x)}{v(x) g^2(x)} \frac{\varphi(x,-\delta)}{\varphi(0,-\delta)},$$

в которой

$$v(x) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx \right\}.$$

Таким образом, ряд (2.3) в сочетании с соотношениями (2.4) дает конструктивное представление решения. В заключение отметим, что физическую величину представляют реальные части построенных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б., Киясбейли Э.Т.Пульсирующее течение максвелловской жидкости в вязко-упругой трубке. Доклады НАН Азербайджана, №3-4, 2003 , с.37-41.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: «Мир», 1983, 400с.
3. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Волны в упругой трубке переменного сечения с протекающей жидкостью.Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов – на – Дону «Новая книга», 2004, с.40-43.
4. Амензаде Р.Ю., Насибов В.Г. Об одном решении задачи о пульсирующем течении жидкости в многослойной упругой трубке переменного сечения. ДАН России, 1994, №6, с.714-716.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.

DƏYİŞƏN EN KƏSİKLİ ÖZLÜ - ELASTİK BORUDA MAKSVEL MAYENİN DALĞA AXINI

E.T.QİYASBƏYLİ

ANNOTASİYA

Birölçülü qoyuluşda dəyişən en kəsikli boruda yerləşən Maksvel mayenin axını tədqiq olunur. Bu zaman boru divarlarının materialının xassələri elastiki irsilik nəzəriyyəsi ilə araşdırılır. Qoyulmuş məsələnin həlli Şturm-Liuvil sinqulyar sərhəd məsələsinin həllinə gətirilir. Sistemin iki iş rejiminə baxılır.

WAVE FLOW OF MAXWELL FLUID IN VISCOUS-ELASTIC TUBE OF VARIABLE SECTION

E.T.KIYASBEYLI

ABSTRACT

Flow of Maxwell fluid in tube of variable section is investigated in one-dimensional statement. Properties of walls material in this case are described by theory of hereditary elasticity. Solution of given problem is reduced to solving of singular Sturm-Liouville boundary-value problem.

Two regimes of system functioning are considered.